Problemes històrics

25. Sigui C un punt del segment AB i amb diàmetres CB, CA i AB fem tres semicercles en el semiplà superior. Considereu la perpendicular a la recta AB per C i el punt D en el qual talla a la semicircumferència de diàmtere AB. Proveu que la superfície limitada per les tres semicircumferències és igual a la superfície del cercle de diàmetre DC. [Del *Llibre dels Lemes*.]

Solució

És absolutament elemental ja que DC és mitja proporcional entre els dos segments que determina sobre AB. D'altra banda $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2 \cdot CA \cdot BC$ i fet.

26. Sigui AB el diàmetre d'un semicercle ACB i fem $AD = BE$. Fem ara tres semicercles sobre AD, EB i DE, els dos dels extrems en el semiplà d'ACB i l'altre en el semiplà oposat. L'àrea limitada pels semicercles de diàmetres AD, DE, EB i ACB és igual a la superfície del cercle de diàmetre CF, on CF és el segment que uneix els centres de les circumferències de diàmetres AB i DE. [Del *Llibre dels Lemes*.]

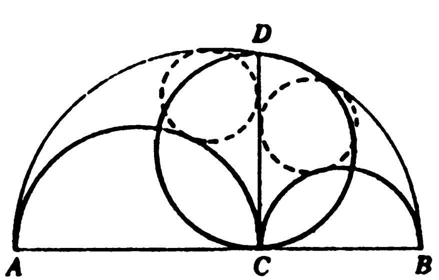
Solució

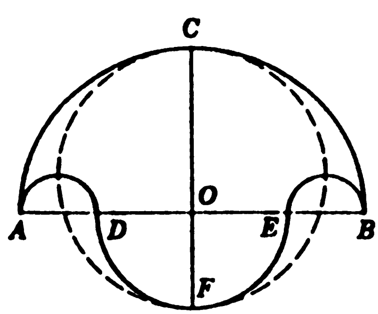
És absolutament elemental ja que

$$AB^2 - 2AD^2 + [AB - 2\,AD]^2 = 2\,[AB^2 + AD^2 - 2\,AB\,AD] = 2\,[AB - AD]^2.$$

Però

$$GF^2 = [AO + CO]^2 = [AO + (AO - AD)]^2 = [AB - AD]^2.$$





27. Sigui $ABCA$ una circumferència i considereu dues cordes $AB, BC[BC > AB]$. Sigui M el punt mig de l'arc ABC i F el peu de la perpendicular que va d'M a BC. Proveu que M és el punt mig de la corda trencada. [El *problema de la corda trencada.*]

Deduïu-ne alguns resultats de trigonometria.

Solució

Cal fer $BE = BA$ i unir E amb M. Els triangles MAB i MBE són iguals, ja que

$$\begin{aligned} \widehat{MAB} &= \pi - \frac{\text{arc}(AM)}{2}; \\ \widehat{MBC} &= \frac{\text{arc}(MC)}{2} = \frac{\text{arc}(AM)}{2}, \quad \text{per hipòtesi.} \end{aligned}$$

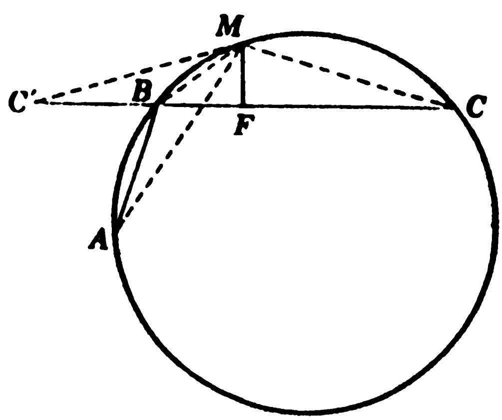
Només cal fer

$$MC = 2\sin\alpha, \quad MB = 2\sin\beta, \quad BC = 2\sin(\alpha+\beta).$$

Aleshores

$$FC = MC \cdot \cos\beta, \qquad BF = BM \cdot \cos\alpha$$

i s'obté la fórmula del sinus de la suma d'α i β.
Anàlogament, donat que $AB = 2\sin(\alpha-\beta)$, és possible d'aconseguir la fórmula de la diferència.



28. Els bous i les vaques d'HELIOS es troben pasturant a la illa de SICÍLIA. N'hi ha de quatre colors: blancs (B, b), negres (N, n), clapejats (C, c) i marrons (M, m). Sabem que les quantitats de bous i vaques satisfan les condicions següents:

1. els bous blancs són tants com els bous marrons i cinc sisenes parts dels negres;
2. els bous negres són tants com els bous marrons i nou vintenes parts dels clapejats;
3. els bous clapejats són tants com els bous marrons i tretze quarantadosenes parts dels blancs;
4. les vaques blanques són tantes com les set dotzenes parts dels bous i vaques negres junts;
5. les vaques negres són tantes com les nou vintenes parts dels bous i vaques amb clapes junts;
6. les vaques clapejades són tantes com les onze trentenes parts dels bous i vaques marrons junts;
7. les vaques marrons són tantes com les tretze quarantadusenes parts dels bous i vaques blancs junts.

A més, els bous blancs i negres junts sumen un nombre quadrat i els bous clapejats i els marrons un nombre triangular.
Quants bous i vaques hi ha de cada classe?

Solució

Les tres primeres equacions menen al sistema indeterminat de primer grau

$$B = \frac{5}{6} N + M, \quad N = \frac{9}{20} C + M, \quad C = \frac{13}{42} B + M,$$

la solució del qual la podem posar en la forma

$$M = 891\alpha, \quad B = 2\,226\alpha, \quad N = 1\,602\alpha, \quad C = 1\,580\alpha.$$

Les quatre equacions següents ens porten al sistema

$$b = \frac{7}{12}[N + n], \quad n = \frac{9}{20}[C + c], \quad c = \frac{11}{30}[M + m], \quad m = \frac{13}{42}[B + b],$$

que té com a solució

$$m = \frac{5\,439\,213}{4\,657}\alpha.$$

Si fem $\alpha = 4\,567\beta$, s'obté finalment

$$\begin{array}{lclcl}
B & = & 10\,366\,428\beta & = & 2\cdot 3\cdot 7\cdot 53\cdot 4\,657\beta \\
N & = & 7\,460\,514\beta & = & 2\cdot 3^2\cdot 89\cdot 4\,657\beta \\
M & = & 4\,069\,197\beta & = & 3^4\cdot 11\cdot 4\,657\beta \\
C & = & 7\,358\,060\beta & = & 2^2\cdot 5\cdot 79\cdot 4\,657\beta \\
b & = & 7\,206\,360\beta & = & 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 23\cdot 23\,373\beta \\
n & = & 4\,893\,246\beta & = & 2\cdot 3^2\cdot 17\cdot 15\,991\beta \\
m & = & 5\,439\,213\beta & = & 3^2\cdot 13\cdot 46\,489\beta \\
c & = & 3\,515\,820\beta & = & 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\,761\beta.
\end{array}$$

Ara cal que

$$B+N=x^2=17\,826\,942=2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\beta.$$

Una possible solució és

$$\beta=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\gamma^2=4\,456\,749\gamma^2.$$

Aleshores

$$\begin{array}{lcl}
B & = & 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 53\cdot 4\,657^2\gamma^2 \\
N & = & 2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 29\cdot 89\cdot 4\,657^2\gamma^2 \\
M & = & 3^5\cdot 11^2\cdot 29\cdot 4\,657^2\gamma^2 \\
C & = & 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 29\cdot 79\cdot 4\,657^2\gamma^2
\end{array}$$

D'ací en resulta que

$$M+C=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657^2\gamma^2\cdot[3^4\cdot 11+4\cdot 5\cdot 79]=3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2\gamma^2=\frac{y(y+1)}{2}.$$

És a dir,

$$\begin{array}{rcl}
4\,(y+1)\,y & = & 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353\cdot 4\,657^2\gamma^2 \\
4y^2+4y+1 & = & 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 353(2\cdot 4\,657\,\gamma)^2+1 \\
(2y+1)^2-A\,\epsilon^2 & = & 1.
\end{array}$$

Finalment s'obté l'equació de Pell

$$\delta^2-4\,729\,494\,\epsilon^2=1.$$

Segons A. H. Bell, després de treballar-hi 4 anys, la mínima solució dóna un valor de γ amb 206 531 dígits i la seva forma és

34555906354559370506303802963617 * * * * * 252058980100,

aconseguint de calcular els 32 primers dígits i els 12 darrers. Aquesta solució fora confirmada pel treball d'H.C. Williams, R.A. German i C. R. Zarnke el quals l'any 1965 aconseguiren, usant una computadora, la solució completa.

29. Proveu, fent servir un paper quadriculat, que

(a) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1;$

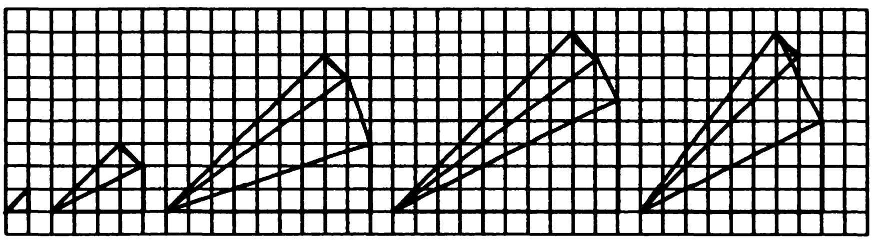
(b) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3};$

(c) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7};$

(d) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{5} + \tan^{-1}\dfrac{1}{8};$

(e) $\dfrac{\pi}{4} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{2} - \tan^{-1}\dfrac{1}{7}.$

Solució



30. Proveu, calculant, que

(a) $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239}$ [MACHIN 1 706];

(b) $\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99}$ [EULER 1 764];

(c) $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8}$ [DASHE 1 844];

(d) $\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}$ [HUTTON 1 776];

(e) $\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ [HUTTON 1 776, EULER 1 779];

(f) $\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{20} + \tan^{-1}\frac{1}{1\,988}$ [STÖRMER 1 896];

(g) $\frac{\pi}{64} = \frac{3}{4}\tan^{-1}\frac{1}{18} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{57} - \frac{5}{16}\tan^{-1}\frac{1}{239}$ [GAUSS];

(h) $\frac{\pi}{64} = \frac{3}{8}\tan^{-1}\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\tan^{-1}\frac{1}{57} - \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{1}{239}$ [STÖRMER];

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{n} = \tan^{-1}\frac{1}{n+m} + \tan^{-1}\frac{m}{n^2+mn+1}$.

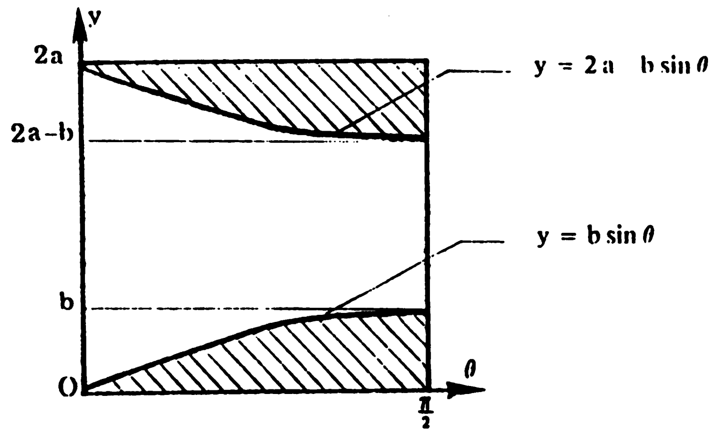
Solució

És un exercici de càlcul. Per exemple en el cas (a) si fem $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$, aleshores $\tan\beta = \frac{1}{5}$ i aleshores $\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{5}{12}$ i $\tan 4\beta = \frac{2\tan 2\beta}{1-\tan^2 2\beta} = \frac{120}{119}$, que difereix solament d'$\frac{1}{119}$ d'1 i l'arctangent d'1 és $\frac{\pi}{4}$. És a dir, $\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - 1}{1+\tan 4\beta} = \frac{1}{239}$ i hem acabat la demostració.

31. LLancem una agulla de longitud L a l'atzar en una superfície plana i horitzontal en la qual s'hi ha dibuixat una col·lecció de paral·leles separades entre si una distància fix $d(\geq L)$. Quina és la probabilitat que l'agulla trepitgi una d'aquestes paral·leles? [És el *problema de l'agulla de Buffon*.]

Solució

Fem $d = 2a$ i $L = 2b$ i sigui I el punt mig de l'agulla de coordenades $\langle\theta, y\rangle$, amb $0 \geq y \geq 2a, 0 \geq \theta \geq \frac{\pi}{2}$. Per què talli una de les paral·leles cal que $y + b\sin\theta \geq 2a$ o que $y - b\sin\theta \leq 0$. Ara representem gràficament el rectangle $[0, \pi/2] \times [0, 2a]$. El centre de l'agulla pot caure en qualsevol d'aquests punts. Ara cal esbrinar els punts $P = (\theta, y)$ favorables al problema que ens ocupa. D'acord amb la figura resulta que



Per tant,

$$P = \frac{2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin\theta\, d\theta}{\pi a} = \frac{2b}{\pi a}.$$

En el cas particular que $b = a$, resulta que $P = \dfrac{2}{\pi}$.

Nota. És possible d'usar aquesta probabilitat per tal de calcular el valor de π. Així LAZZERINI l'any 1 901 fent 3 408 llençament va aconseguir un valor de π amb sis decimals exactes. En aquella època s'havien calculat ja 527 xifres decimals exactes de π.

32. Proveu que $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$. [Aquest teorema fou establert per EULER l'any 1 736 i reproduït a la *Introductio in Analysin infinitorum* (1 748).].

Solució

La demostració d'EULER es basa en una propietat dels polinomis. Considerem el polinomi

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + 1 = 0.$$

Sabem que

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_{n-1} + a_2 \cdots a_{n-2} a_n + \cdots + a_2 \cdots a_n &= \pm \frac{a_1}{a_n} \\ a_1 \cdots a_n &= \mp \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

D'ací que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = -a_1$. Ara ho aplica amb tota naturalitat a les sèries de potències. Considera la sèrie

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k,$$

la qual s'anul·la en els punts $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Aleshores $1 - \dfrac{y}{3!} + \dfrac{y^2}{5!} + \cdots$ s'anul·la en $y = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots$. Ara aplicant el teorema anterior, vàlid per a polinomis, obté

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{3!},$$

que acaba la demostració.

Nota. Cal remarcar que és possible donar una demostració *no-estàndard* correcta d'aquesta manera de fer incorrecta d'EULER, com podem veure a LUXEMBURG, *American Mathematical Montly*, **80**, 38–67 i també a.

Indiquem de passada que EULER per tal de calcular el logaritme de π calcula també

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdots$$

33. Quina és la probabilitat que, en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre si.

Solució

Suposem que p és un nombre primer. Aleshores hi ha $\frac{1}{p}$ nombres que són divisibles per p. La probabilitat que p divideixi un nombre m, agafat a l'atzar, és doncs $\frac{1}{p}$. Per tant, la probabilitat que p divideixi alhora a m i a n és $\frac{1}{p^2}$ [suposant, és clar, la independència en l'elecció]. Així doncs la probabilitat que p no divideixi ni a m ni a n és $1-\frac{1}{p^2}$.

Ara volem que m i n siguin primers entre si i, per tant, cal que no hi hagi cap nombre primer que els divideixi alhora. La probabilitat que això passi és

$$P=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\cdots$$

Si observem que

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right) &= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\\
\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right) &= 1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}\cdots\\
\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right) &= 1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}\cdots+\frac{1}{49^2}+\cdots,
\end{aligned}$$

tindrem que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\prod_{p\ \text{primer}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)=1$ i això acaba la demostració.

Nota. Hom es planteja l'ambigüitat del terme "agafats a l'atzar" i posa de manifest que la correcció d'aquest terme passa per l'àlgebra dels observables considerant la *paradoxa de Bertrand*.

34. Els dos cercles tangents a la recta DC i a les semicircumferències de diàmetres AD i AC, DC i AC són iguals. [Del *Llibre dels Lemes*.]

Solució

Per tal de poder-ho demostrar cal establir prèviament un lema que diu:

> *Considerem dues circumferències de centre F i G tangents en un punt E. Suposem que llurs diàmetres CGD i AFB són paral·lels. Aleshores els punts E, D i B estan alineats.*

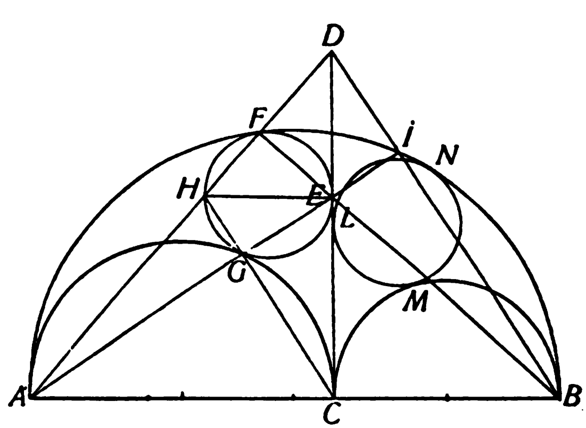
Acceptant la validesa d'aquest lema hem de demostrar que els diàmetres HE i LE' són iguals. De fet demostrarem que

$$AC \cdot BC = AB \cdot HE = AB \cdot LE', \text{ per analogia.}$$

1. Pel lema anterior $D, H, A; F, E, B; A, G, E; H, G, C$ estan alineats.
2. Perllonguem AGE fins a I.
3. Unim I amb B.
4. AHF i CED es tallen [postulat de les paral·leles] en D.
5. Unim D i I: D, I, B estan alineats.

Tenim tres alçades i dos costats; el tercer està completament determinat. [El text d'ARQUIMEDES no diu res més.]

6. $GC \,||\, IB$ i per tant $\dfrac{AD}{HD} = \dfrac{AC}{HE} = \dfrac{AB}{BC}$ i finalment $AB \cdot HE = AC \cdot BC$.



Ara cal demostrar el lema anterior:

1. E, G i F estan alienats, ja que ambdues circumferències tenen una tangent comuna en el punt E.
2. $DH \,||\, EF$.
3. $EG = GD = FH$ i $HB = FB - FH = EF - EG = GF = DN$.
4. Triangles isòscels amb angles en el vèrtex iguals. Angles a la base iguals
5. Fet.

1. E, G i F estan alienats, ja que ambdues circumferències tenen una tangent comuna en el punt E.
2. EGD i EFA isòscels. Angles en el vèrtex iguals.
3. Fet.